Heinrich BÜRGER

VARIABLE IN DER 1. UND 2. KLASSE DER AHS

1. Verwendung von Variablen

1.1. Mit Variablen kann man Situationen allgemein beschreiben,

d.h. man kann Aussagen treffen, die sich auf alle Elemente einer Menge oder eines nicht genau abgegrenzten Bereichs beziehen. Solche Beschreibungen mit Variablen erfolgen nicht nur in der Mathematik, sondern auch in anderen Gebieten.

Beispiel 1: Der Satz "Das Quadrat einer reellen Zahl ist nicht negativ" enthält die Variable "eine reelle Zahl" und bezieht sich auf alle Elemente der Menge der reellen Zahlen.

Beispiel 2: In der Festsetzung "Die Pension einer Witwe beträgt (unter bestimmten Voraussetzungen) 60% der Pension, die ihrem Mann zugestanden wäre" sind "Pension einer Witwe" und "Pension, die ihrem Mann zugestanden wäre" Variablen. Auf welche Bereiche sich diese Variablen beziehen, ist ohne weitere Informationen nicht feststellbar.

Beispiel 3: "Wenn jemand ein Gesetz verletzt, erhält er eine Strafe". Variable sind "jemand", "Gesetz" und "Strafe". "Jemand" bezieht sich auf eine nicht näher beschriebene Personengruppe, etwa auf die Menge aller strafmündigen Staatsbürger von Österreich. Ebenso sind die Bereiche für die beiden anderen Variablen nicht eindeutig festgelegt.

Durch die Verwendung von Variablen erfolgt eine Loslösung von konkreten Situationen; es werden nicht eine spezielle reelle Zahl oder konkrete Pensionen oder eine bestimmte

Person betrachtet. Vielmehr wird das Gemeinsame verschiedener Situationen, die eine gewisse Gleichartigkeit aufweisen, betrachtet. Variable ermöglichen Verallgemeinerungen und deren Beschreibung. Erst durch die Verwendung von Variablen können beispielsweise Gesetzmäßigkeiten, die sich nicht nur auf wenige Einzelobjekte beziehen, beschrieben werden.

Eine Variable kann als ein abstraktes Objekt aufgefaßt werden, dem nur jene Eigenschaften zugeschrieben werden, die allen Elementen gemeinsam sind, auf die sich die Variable bezieht. Eine Variable kann als ein Vertreter für jedes dieser Elemente angesehen werden.

1.2. Die in der Mathematik übliche Verwendung von einfachen Symbolen als Variable ermöglicht knappe, übersichtliche Darstellungen. Insbesondere können relationale oder funktionale Beziehungen sowie Rechenstrukturen deutlich gemacht werden.

Beispiel 1: Ist x eine reelle Zahl, so gilt:

$$\underline{x^2 \geq 0}$$

Beispiel 2: Bezeichnet man die Pensionen von Witwe bzw. Mann mit W bzw. M, dann gilt:

$$\underline{W \text{ ist } 60\ \% \text{ von } M}$$

oder:

$$W = \frac{60}{100} \cdot M = 0{,}6 \cdot M$$

Beispiel 4: Die Gesetzmäßigkeit, die der Rechnung "372-91-9 = = 372 - 100" zugrunde liegt, kann verbal so beschrieben werden: "Statt von einer Zahl zwei weitere Zahlen zu subtrahieren, kann man auch die Summe dieser Zahlen (von der ersten Zahl) subtrahieren". Die symbolische Darstellung

$$\underline{a-b-c = a-(b+c)}$$

ist übersichtlicher, präziser und macht die Rechenstruktur deutlicher.

1.3. <u>Die Verwendung von Variablen, insbesondere von symbolischen Variablen, kann beim Problemlösen hilfreich sein.</u>

<u>Beispiel 5:</u> Problem: "Eine Ware wird um 530 S verkauft. Wie hoch ist der Preis der Ware ohne Mehrwertsteuer bei einem Steuersatz von 20%?" Eine verständnisvolle Behandlung dieses Problems erfordert zunächst eine Klärung des Begriffes der Mehrwertsteuer. Etwa: "Zu einem Ausgangspreis muß ein gewisser Prozentsatz (hier 20%) dieses Preises addiert werden, um den Endpreis zu erhalten". Bezeichnet man die Variable "Ausgangspreis" mit A, die Variable "Endpreis" mit E, dann gilt:

$$A + (20\% \text{ von } A) = E$$

oder:

$$A + 0{,}2 . A = E$$

Diese Darstellung ermöglicht den Einsatz mathematischer Methoden. Die Anwendung des Distributivgesetzes führt auf

$$1{,}2 . A = E,$$

die Ausnutzung des Zusammenhanges zwischen Multiplikation und Division führt zur Lösung des Problems:

$$A = E : 1{,}2$$

<u>Grundsätzlich setzt eine verständnisvolle und planmäßige Bearbeitung eines Problems</u>, das mit mathematischen Mitteln gelöst werden soll, zumeist <u>ein Erkennen der allgemeinen Beziehungen</u> in der Problemsituation <u>voraus</u>. Dazu ist ein <u>Denken in allgemeinen Begriffen</u>, die durch verbale oder symbolische Variable erfaßt werden können, <u>notwendig</u>.

Die Darstellung von Beziehungen (etwa von funktionalen Beziehungen) mit symbolischen Variablen (etwa durch Aufstellung einer Formel) kann zusätzliche Klarheit über diese Beziehungen bringen und schafft die Möglichkeit, mathematische Verfahren zur Lösung des Problems einzusetzen.

Hat man die mathematische Struktur einer konkreten Situation mit Hilfe von Variablen erfaßt und ein zugehöriges Problem damit gelöst, so steht auch ein Problemlöseverfahren für gleichartige Situationen, die in gleicher Weise durch Variablen beschrieben werden können, zur Verfügung.

Variable können auch noch auf andere Weise beim Problemlösen hilfreich sein, sie ermöglichen ein "hypothetisches Arbeiten", wie im folgenden Beispiel demonstriert wird.

Beispiel 6: Problem: "Gibt es eine natürliche Zahl, die mit 3 multipliziert eine um 5 größere Zahl ergibt?" Falls man annimmt, daß eine solche Zahl existiert und sie mit z bezeichnet, dann muß gelten:

$$z \cdot 3 = z + 5$$

bzw.

$$z \cdot 2 = 5$$

Aus dieser Gleichung erkennt man die Lösung des Problems.

1.4 Die Verwendung von Variablen schafft Voraussetzungen für deduktives Begründen.

Beispiel 7: Um die Aussage, daß das Quadrat einer (von 1 verschiedenen) natürlichen Zahl um 1 größer als das Produkt der ihr benachbarten Zahlen ist, zu begründen, betrachtet man eine "beliebige" natürliche Zahl, bezeichnet sie etwa mit n und vergleicht ihr Quadrat n^2 mit dem Produkt $(n-1).(n+1)$ ihrer Nachbarzahlen. Aus der Gültigkeit von $(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$ für alle reellen Zahlen schließt man dann auf $(n-1).(n+1) = n^2 - 1$ und folgert daraus die Richtigkeit der Behauptung.

Falls eine Begründung einer Aussage nicht durch Überprüfung der Aussage für jedes einzelne Element der Menge, auf die sich die Aussage bezieht, erfolgen kann, muß man mit Variablen arbeiten, die jedes Element der Menge vertreten können. Zur Begründung zieht man außerdem Aussagen heran, die gleichfalls mit Variablen formuliert sind und die für alle Elemente der betrachteten Menge gelten.

1.5. Variable können helfen, Vorstellungs- und Anwendungsbereiche zu überschreiten.

Beispiel 8: In der nebenstehenden Tabelle sind Warenmengen und zugehörige Preise angegeben. Mit der allgemeinen Beschreibung der Vorschrift zur Berechnung des Preises von a kg durch 8,5.a verbindet man möglicherweise nur eine Vorstellung für kleine Werte von a (etwa $a = 1,2,3,\ldots 10$). Die allgemeine Darstellung 8,5.a ermöglicht aber nun, Preise (rein formal, ohne weitere Vorstellungen) für Werte von a zu berechnen, die nicht dem ursprünglichen Vorstellungs- bzw. Anwendungsbereich von 8,5.a entsprechen. So kann beispielsweise auch der Preis von 15,7 kg berechnet werden, also die Formel für $a = 15,7$ angewendet werden.

Menge in kg	Preis in S
1	8,5
2	8,5.2
3	8,5.3
a	8,5.a

Dieses Beispiel zeigt, Vorteile von formalen Darstellungen mit symbolischen Variablen: Sie ermöglichen einerseits eine Interpretation durch kleine Zahlen und damit einfache Vorstellungen und "Einsichten", andererseits können diese formalen Darstellungen auch in Bereichen verwendet werden, die die ursprünglichen Vorstellungen weit überschreiten.

Die Loslösung von Vorstellungen durch formale Darstellungen und das Operieren mit diesen formalen Darstellungen können zum Erschließen neuer Bereiche führen. Historische Beispiele dafür sind die Zahlbereichserweiterungen, die zu den negativen oder zu den komplexen Zahlen geführt haben. (Man vergleiche dazu auch [2]).

2. Ziele und Forderungen zur Behandlung von Variablen im Mathematikunterricht

Die fundamentale und vielseitige Rolle von Variablen bei Denkprozessen und speziell beim Arbeiten in der Mathematik und die Nützlichkeit der Verwendung von symbolischen Variablen lassen es zweckmäßig erscheinen, daß die Schüler frühzeitig mit symbolischen Variablen arbeiten. Selbstverständlich soll die Einführung behutsam erfolgen. Dabei müssen Variable nicht unbedingt als Platzhalter eingeführt werden. Symbolische Variable können auch als Abkürzungen für Namen eingeführt werden (Variable als "Bedarfsnamen"; man vergleiche [1]). Die Einführung des Variablenbegriffes sollte aber auch in Verbindung mit geometrischen Interpretationen erfolgen.

Allgemein sollten Variable und die elementare Algebra möglichst häufig mit inner- und außermathematischen Sachzusammenhängen verbunden werden. Eine enge Verflechtung mit dem Zahlenrechnen, mit anschaulichen und inhaltlichen Vorstellungen ist anzustreben. Darstellungen mit Variablen (Formeln) und die Methoden der elementaren Algebra sollten vielseitig als Instrumente bei mathematischen Tätigkeiten eingesetzt werden.

Im einzelnen werden bei der Einführung in das Arbeiten mit Variablen (insbesondere in der ersten und zweiten Klasse der AHS) die folgenden Tätigkeiten der Schüler vorgeschlagen, die gleichzeitig als Lernziele angesehen werden können.

- Beschreiben von Situationen in inner- und außermathematischen Bereichen mit Variablen, insbesondere Aufstellen von Formeln.

- Interpretieren von formalen Darstellungen mit Variablen (Formeln) durch verbale Beschreibungen, durch Einsetzen von Zahlen und durch anschauliche Deutungen.
- Anwenden von formalen Darstellungen beim Lösen von Problemen.
- Umformen von einfachen Formeln und Lösen von einfachen Gleichungen durch Anwenden von inversen Rechenoperationen bzw. durch Verwenden der elementaren Äquivalenzen $a+b=c \Leftrightarrow a=c-b$ und $a.b=c \Leftrightarrow a=c:b$.
- Bewußtes Arbeiten mit Rechenregeln.

Um diesen Forderungen zu entsprechen, sind planmäßige Aufgabenstellungen im Unterricht nötig. Im folgenden werden Möglichkeiten für Aufgabenstellungen, die den obigen Zielen entsprechen und diese auch erläutern, vorgestellt. Diese Vorschläge sind nicht im Sinne eines Lehrganges zu sehen, der systematisch abgehandelt werden soll, vielmehr können die einzelnen Aufgabenstellungen bei passenden Gelegenheiten des Mathematikunterrichts der ersten und zweiten Klasse eingebaut werden. (Eine umfangreicherer Zusammenstellung von Aufgaben, die auch einen Großteil der hier angeführten Aufgaben umfaßt, ist in [3] enthalten.)

3. Objekte der Geometrie als Variable für Zahlen

3.1. Darstellung von Größen und von Zahlen durch Strecken und andere geometrische Objekte

(1) Höhen von Gebäuden oder von Bergen, Entfernungen von Städten u.a. durch Strecken darstellen.

(2) Geldbeträge als Strecken oder allenfalls auch als Rechtecke mit gleicher Basislänge darstellen.

(3) Zahlen als Strecken darstellen; dazu Wahl geeigneter Maßstäbe.

Beispiel 1:

a) Stelle die Zahlen 3,7,12 durch Strecken dar! (Maßstab 1 $\hat{=}$ 1 cm).

b) Stelle die Zahlen 3500, 8270 und 14230 als Strecken dar! (Maßstab 100 $\hat{=}$ 1 mm).

(4) Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden darstellen. Anfertigen von Skalen, Ablesen von Markierungen auf diesen Skalen.

Bemerkung: Durch die angeführten Aufgabenstellungen sollen die Schüler nicht nur lernen, Größen und Zahlen geometrisch darzustellen, sondern die Schüler sollen dadurch auch vorbereitet werden, Strecken als Zahlen und auch als Variable für Zahlen zu deuten.

3.2. Strecken als Variable für Zahlen

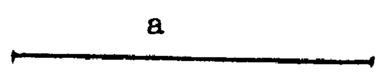
(1) Deuten von Strecken vorgegebener Länge als Zahlen.

Beispiel 2:

Zeichne eine Strecke von 5 cm Länge! Gib Zahlen an, die durch diese Strecke dargestellt werden können!
Je nachdem, welcher Maßstab zugrunde gelegt wird, kann diese Strecke verschiedene Zahlen darstellen. Grundsätzlich kann durch eine Strecke jede natürliche (positive rationale) Zahl dargestellt werden.

(2) Bezeichnen von "unbestimmten" Zahlen, die durch Strecken dargestellt werden. Zahlen, die noch nicht näher bestimmt sind, kann man mit Buchstaben bezeichnen. Zweckmäßigerweise bezeichnet man darstellende Strecken mit dem gleichen Buchstaben.
Im Beispiel von (1) erhält man nach Wahl eines Maßstabes für a eine Zahl, etwa:

1 $\hat{=}$ 1 cm : a = 5
500 $\hat{=}$ 1 mm; a = 2500



Bemerkung: Der Buchstabe a ist hier eine Variable für Zahlen und nicht eine Bezeichnung für eine Streckenlänge. Es ist also nicht $a = 5$ cm.

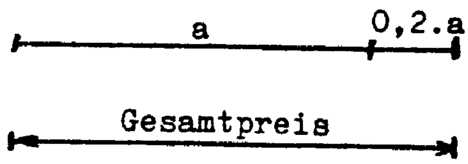
3.3. Darstellen von Rechenoperationen

Beispiel 3:

Zeichne drei Strecken, die die Zahlen a,b,c darstellen!
Zeichne dann Strecken, die die Zahlen $a + b$, $a - b$, $3 . a$, $2 . a - 0,5 . c$, $(a - b) + c$, $a - (b + c)$ darstellen!

Beispiel 4:

Eine Strecke stelle einen Preis von a Schillingen dar. Zu diesem Preis werden 20% von a, also 0,2.a als Mehrwertsteuer dazugeschlagen. Stelle den Gesamtpreis als Strecke dar!



Bemerkung: Durch Aufgaben wie in Beispiel 3 lernen Schüler, daß nicht nur a und b, sondern auch $a + b$, $2.a - b$ usw. Zahlen darstellen.

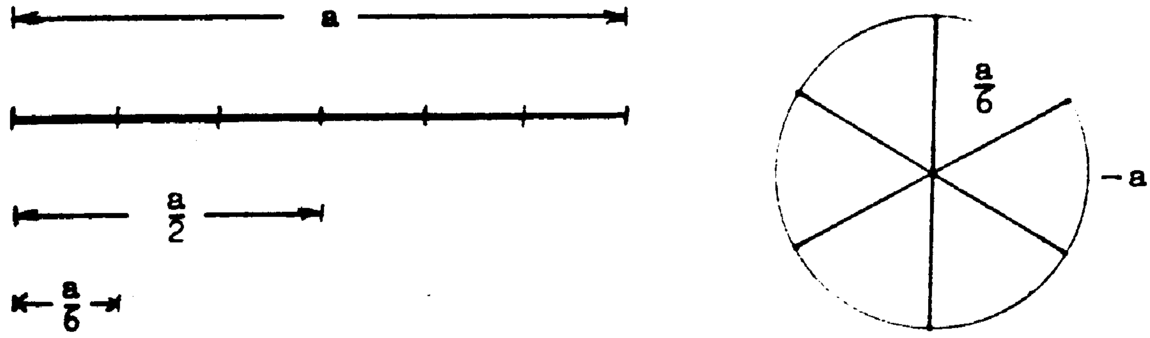
3.4. Darstellen von Rechenregeln

Einfache Rechenregeln, wie beispielsweise

$(a - b) - c = a - (b + c)$, $2.(a + b) = 2.a + 2.b$,

$(a + b) + c = a + (b + c)$, $\frac{a}{2} : 3 = \frac{a}{6}$

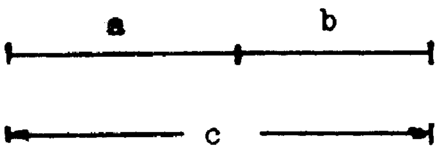
können einerseits durch Streckendarstellungen veranschaulicht, andererseits auch aus zeichnerischen Darstellungen abgelesen werden.



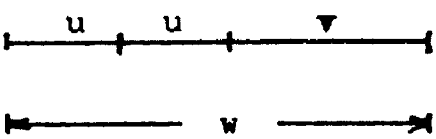
Bemerkung: Solche Aufgaben können zur anschaulichen Fundierung und zur vielseitigen Sicht von Rechengesetzen und damit auch zur Vorbereitung von Termumformungen dienen.

3.5. Ablesen von Gleichungsäquivalenzen

Beispiel 5:

a) 

$a + b = c$	$c = a + b$
$c - b = a$	$a = c - b$
$c - a = b$	$b = c - a$

b) 

$2.u + v = w$

$v = w - 2.u$

$2.u = w - v$

$u = (w - v) : 2$

4. Rechenregeln

Bei Rechenregeln wird in dieser Darstellung nicht unterschieden, ob sie in einem argumentativen Zusammenhang als Grundgesetze bzw. Axiome (wie z.B. die Kommutativgesetze) oder als herleitbare Sätze (wie z.B. $a - b - c - d = a - (b + c + d)$) oder als Definitionen (wie z.B. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$) erscheinen. (Dies schließt aber nicht aus, daß im Unterricht der 1. und 2. Klasse einzelne Rechenregeln bewiesen oder als Definitionen charakterisiert werden.)

Als Ziele des Arbeitens mit Rechenregeln seien genannt: Die Schüler sollen mit Rechenregeln für natürliche Zahlen, Dezimalzahlen und Bruchzahlen vertraut werden, indem sie die Regeln mit Variablen formulieren, inhaltlich interpretieren und begründen sowie bewußt anwenden.

4.1. Erarbeiten und Formulieren von Rechenregeln

Rechenregeln sollten den Schülern im allgemeinen nicht präsentiert werden, sondern von diesen nach einem Erkenntnis- oder Verallgemeinerungsprozeß mit Variablen, gelegentlich auch verbal, formuliert werden.

(1) Gewinnen von Regeln durch Bewußtmachen und Beschreiben von Rechengewohnheiten bzw. bekannten Rechengängen.

Beispiel 1:

Beschreibe, wie man 32.5, 46.7, ... im Kopf rechnet!
$32.5 = (30 + 2).5 = 30.5 + 2.5 = \ldots$
....
Wenn man statt 30 (bzw. 40, ...) das Zeichen a, statt 2 (bzw. 6, ...) das Zeichen b und für 5 (bzw. 7, ...) das Zeichen c schreibt, was erhält man dann?

$$(a + b).c = a.c + b.c$$

Dies gilt für jede Zahl a, jede Zahl b, jede Zahl c.

Beispiel 2:

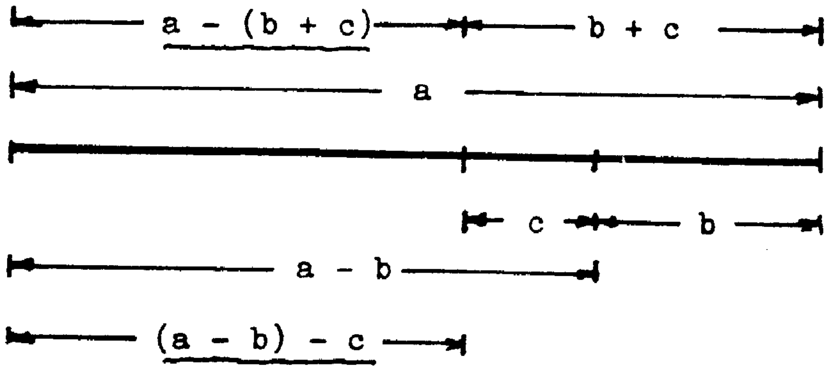
Berechne $573 - 21 + 234 - 62 - 317 + 234$

a) in der angegebenen Reihenfolge,
b) in einer anderen (zweckmäßigeren Reihenfolge)!

Gib eine Formel an, die die Gleichwertigkeit der beiden Rechengänge beschreibt! (Verwende die Buchstaben u,v,w,x,y,z.)

(2) Ablesen von Regeln aus geometrischen Darstellungen.

Beispiel 3:



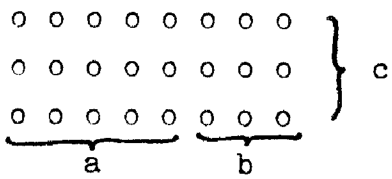
(3) Begründen von Regeln in Sachsituationen.

Beispiel 4:

Jemand hat 100 S (500 S, a S) und gibt zuerst 30 S (260 S, b S) und dann 40 S (100 S, c S) aus. Welcher Betrag bleibt übrig?
(a-b)-c
Dieser Restbetrag ergibt sich auch, wenn b S und c S zusammen ausgegeben werden: (a-b)-c = a-(b+c)

Beispiel 5:

In einem Garten gibt es a Reihen und anschließend b Reihen zu je c Bäumen. Zähle die Anzahl der Bäume auf zwei Arten!



(4) Beschreiben von definitorischen Rechenregeln.

Beispiel 6: a) $0{,}1 \cdot a = a : 10$

b) $\frac{1}{2} \cdot a = a : 2$

c) $0{,}3 \cdot a = (0{,}1 \cdot a) \cdot 3$

d) Wie berechnet man $\frac{u}{v} \cdot \frac{x}{y}$?

4.2. Interpretieren von Rechenregeln

(1) Einsetzen von Zahlen in Rechenregeln.

Beispiel 7:

Gib zwei Beispiele für die Regel:

$u - v - w + t = u + t - v - w$

Beispiel 8:

Zeige, daß die folgende Regel falsch ist:

$(a - b) - c = a - (b - c)$

(2) Geometrisches Darstellen von Rechenregeln.

Beispiel 9:

Fertige eine Zeichnung an, in der die Gültigkeit der Regel $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b.c}$ für $b = 2$ und $c = 5$ gezeigt wird. Stelle dazu die Zahl a durch eine 10 cm lange Strecke dar!

(3) Interpretieren von Rechenregeln in Sachsituationen.

Beispiel 10:

1 kg Fleisch kostet 60 S (k S). Jemand kauft x kg und y kg Fleisch. Erkläre durch zweifache Berechnung des Gesamtpreises das Distributivgesetz!

4.3. Arbeiten mit Rechenregeln

(1) Rechenaufgaben, die die Kenntnis von Rechengesetzen erfordern.

Beispiel 11:

Berechne auf zwei Arten und gib das Rechengesetz an, das diese Berechnung nach zwei Arten rechtfertigt:

$$36 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$$

(2) Rechtfertigen von Rechenschritten durch Rechengesetze.

Beispiel 12:

Dividiere 5,6 : 0,7.
Gib eine Rechenregel an, die bei dieser Division verwendet wird!

Beispiel 13:

$0{,}6 \cdot 45 = (0{,}1 \cdot 6) \cdot 45 = 0{,}1 \cdot (6 \cdot 45) = 0{,}1 \cdot 270 = 27.$

Welche Rechenregeln wurden hier verwendet?

(3) Begründen von Rechenregeln.

Beispiel:

Begründe durch die Definition der Division von Bruchzahlen:

$$\frac{a}{b} : \frac{1}{c} = \frac{a.c}{b}$$

[Folgende Definition der Division wird vorausgesetzt:
$A : B = X$ ist gleichbedeutend mit $B \cdot X = A$.]

5. Beschreiben von Aufgabenstellungen und Rechengängen mit Variablen, Aufstellen von Formeln

5.1. Darstellen von Rechenanweisungen

Beispiel 1: Rechne: $942 + (449 - 130)$
$835 + (154 - 78)$

Beschreibe den gemeinsamen Rechengang dieser beiden Aufgaben in Worten, durch eine Zeichnung (bezeichne die Zahlen mit x, y, z) und durch Variablen!

Beispiel 2:

a) Subtrahiere vom Produkt der Zahlen 72,5 und 25 die Summe der beiden Zahlen. Schreibe zunächst diese Anweisung nur mit Zahlzeichen, Rechenzeichen und Klammern an!

b) Ersetze in dieser Darstellung die Zahlzeichen durch Variablen!

c) Ersetze dann die Variablen wieder durch Zahlen, die du selbst wählen kannst! Kannst du beliebige Zahlen wählen?

5.2. Beschreiben von Sachsituationen und zugehörigen Rechengängen

(1) Beschreiben von direkten Proportionalitäten.

Beispiel 3:

1 kg Zucker kostet 35 S.

a) Stelle in einer Tabelle die Preise für 1 kg, 2 kg, 3 kg, 5 kg, 10 kg, 20 kg, 0,5 kg, 1,5 kg Zucker zusammen!

b) Gib den Preis von x kg Zucker an!

Beispiel 4 (Fortsetzung von 3):

Bezeichnet man den Preis von x kg mit P(x), so erhält man die Formel: $P(x) = x \cdot 35$

a) Berechne nach dieser Formel P(30) und P(2,5)

b) Wieviel kg Zucker kosten 560 S?

Lösung: a) $P(30) = 30 \cdot 35 = \ldots$

$P(2{,}5) = 2{,}5 \cdot 35 = \ldots$

b) Für welche Zahl x ist: $x \cdot 35 = 560$.

Welche Zahl x muß man mit 35 multiplizieren, um 560 zu erhalten? Diese Zahl erhält man durch die Division 560 : 35.

Beispiel 5 (Fortsetzung von 4):

1 kg Zucker kostet a S. Stelle in einer Tabelle die Preise von 1 kg, 2 kg, 3 kg, 10 kg, 1,5 kg und von x kg zusammen!

Beispiel 6 (Fortsetzung von 5):

Beschreibe die Formel $P(x) = a \cdot x$ in Worten!
(Hinweis: Überlege zunächst, was a,x und P(x) bedeuten;
z.B. a ... Preis von 1 kg; x ... Zuckermenge).

Beispiel 7:

8 t Kartoffel nehmen b m^3 Raum ein. Wieviel m^3 Raum nehmen
a) 1 t, b) z t ein?

Beispiel 8 (Fortsetzung von 7):

a t Kartoffel nehmen b m^3 Raum ein. Wieviel m^3 nehmen z t ein?

(2) Beschreiben von indirekten Proportionalitäten

Beispiel 9:

Ein Radfahrer fährt annähernd gleichförmig mit einer Geschwindigkeit von 12 m/s und benötigt für einen Rundkurs 360 s. Wie lange braucht er, wenn seine Geschwindigkeit 6 m/s, 3 m/s, 1 m/s, 15 m/s, x m/s beträgt?

Beispiel 10 (Fortsetzung von Beispiel 9):

Ein Radfahrer hat eine Geschwindigkeit von c m/s und benötigt für einen Rundkurs t s.

a) Gib die Länge l des Rundkurses an und fasse diese Formel in Worte!
b) In Beispiel 9 war $c = 12$ und $t = 360$. Berechne l nach der Formel von a)!
c) Berechne die Zeit t aus der Formel von a), wenn $c = 6$ und l gleich dem in b) gefundenen Wert ist!
d) Berechne auf gleiche Weise nach dieser Formel, wie lange der Radfahrer braucht, wenn seine Geschwindigkeit 3 m/s, 1 m/s, 15 m/s, x m/s beträgt. Vergleiche mit den Ergebnissen von Beispiel 3 !

Beispiel 11:

Ein Badebecken wird durch einen Zufluß, der 150 l/min liefert, in 40 min gefüllt.

a) Wie lange dauert die Füllung, wenn der Zufluß nur 120 l/min liefert?
b) Wieviel l/min müssen zufließen, wenn die Füllung in 25 min erfolgen soll?
c) Wieviel l/min müssen zufließen, wenn ein Badebecken von 5000 l Inhalt in 40 min gefüllt werden soll?
d) Wie lange dauert die Füllung eines 5000 l fassenden Beckens, wenn 160 l/min zufließen?

Stelle zunächst eine Formel auf, die den Zusammenhang zwischen den in dieser Aufgabe auftretenden Größen (Füllzeit, Zuflußmenge pro Minute, ...) beschreibt und verwende diese Formel zur Lösung.

Lösung: t ... Füllzeit
k ... Zuflußmenge pro Minute
V ... Inhalt des Beckens

$V = k \cdot t$

Nach der Angabe ist zunächst $k = 150$, $t = 40$, also $V = 6000$.

a) $V = 6000$, $k = 120$;
Aus $6000 = 120 \cdot t$ folgt: $t = 6000 : 120 = 50$
b) $6000 = k \cdot 25$ $\quad k = 6000 : 25 = 240$
c) $5000 = k \cdot 40$ $\quad k = 5000 : 40 = 125$
d) $5000 = 160 \cdot t$ $\quad t = 5000 : 160 = 31{,}25$

(3) Beschreiben weiterer Sachsituationen und zugehöriger Rechengänge.

Beispiel 12:

a) Jemand kauft 15 kg Äpfel zu 8 S und 10 kg Äpfel zu 12 S.
b) Jemand kauft 20 kg Äpfel zu 9 S und 8 kg Äpfel zu 14 S.

Gib eine weitere Angabe dieser Art mit anderen Zahlen an! Ersetze die Zahlen durch Buchstaben und gib so eine allgemeine Beschreibung der drei Angaben mit Variablen

Versuche die Angaben allgemein mit Worten ohne Zahlen und ohne symbolische Variable zu beschreiben.

Beispiel 13:

In einer Schachtel sind a Kugeln. Wieviel Kugeln sind in der Schachtel, wenn man a) noch doppelt so viele Kugeln, b) b Kugeln, c) um 2 Kugeln mehr als b dazu gibt?

Beispiel 14:

Jemand soll u Ziegel und v Platten transportieren. Ein Ziegel wiegt A kg, eine Platte B kg.

a) Wieviel kg wiegen alle Ziegel und Platten zusammen?

b) Ziegel und Platten werden in drei gleich schwere Teile aufgeteilt und auf drei Autos verladen. Wieviel kg hat ein Auto zu transportieren?

Beispiel 15:

In einem Saal sind x Männer und y Frauen. Was bedeutet die Formel:

a) $x = y$ b) $x = 3 \cdot y$ c) $y = x - 2$ d) $x = y : 2$

6. Gleichungen

Bei den vorangehenden Beispielen waren bereits mehrfach Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ zu lösen. Zur Lösung einer solchen Gleichung genügt es den Zusammenhang zwischen Multiplizieren und Dividieren zu kennen. Dieser ist den Schülern durch die zu einer Division gehörende Probe durch Multiplikation bekannt. Ebenso kennen die Schüler diesen Zusammenhang aus der mit einer Division, etwa $56 : 8$, verbundenen Fragestellung: "8 mal wieviel ist 56?"

Allgemein gilt:

$a : b = x$ ist gleichbedeutend (gleichwertig, äquivalent) mit
$b \cdot x = a$

(Diese Beziehung kann als Definition der Division verwendet werden, insbesondere in Zahlbereichen, die über die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen hinausgehen und in denen es nicht mehr möglich ist, das Dividieren als Teilen zu deuten).

Mit der Kenntnis der Gleichwertigkeit von $b \cdot x = a$ mit $a : b = x$ können also alle Gleichungen gelöst werden, die bei verschiedenen Anwendungssituationen bisher auftraten. Auch bei der Berechnung einer Seitenlänge aus der Flächeninhaltsformel für das Rechteck tritt derselbe Gleichgunstyp auf. Die Behandlung von Äquivalenzumformungen von Gleichungen in der ersten und zweiten Klasse ist also nicht nötig. Diese Umformungen sind erst für kompliziertere Gleichungen, wie sie in der dritten Klasse auftreten, nützlich.

Außer dem Gleichungstyp $a \cdot x = b$ kann auf analoge Weise der Gleichungstyp $a + x = b$ gelöst werden. Die Lösung erfolgt auf Grund des Zusammenhanges zwischen Addieren und Subtrahieren:

$$b - a = x \text{ ist gleichbedeutend mit } a + x = b$$

Dieser Zusammenhang kann ebenso wie der zwischen Multiplizieren und Dividieren geometrisch veranschaulicht werden.

Mit diesen Kenntnissen können auch Gleichungen wie beispielsweise

$$3 \cdot x + 2 = 11$$

gelöst werden. Mit $3 \cdot x + 2 = 11$ muß $3 \cdot x = 9$ und $x = 3$ sein. Auf diese Weise kann aus der Umfangsformel $u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ für das Rechteck a berechnet werden, falls u und b gegeben sind.

Literatur:

[1] GRIESEL, H.: Leerstellenbezeichnung oder Bedarfsname. Anmerkungen zur Didaktik des Variablenbegriffs.- Math. Semesterberichte XXIX(1982), Heft 1.

[2] JAHNKE, N.: Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem. - Inst.f.Didaktik der Mathematik der Univ.Bielefeld,Materialien und Studien, Band 10. Bielefeld, 1978.

[3] MALLE G.,BÜRGER H.,FISCHER R.: Didaktische Fragen zur elementaren Algebra. Skriptum zur Lehrerfortbildung.- Universität Klagenfurt 1982.